Viaje a través de la cuadratura del círculo

F. JAVIER PÉREZ FERNÁNDEZ*

Efectuamos un recorrido histórico por el problema de la cuadratura del círculo, con sus múltiples relaciones, desde sus orígenes hasta su resolución en 1882, de la mano de Lindemann.

Introducción

Cuando los organizadores de estas Jornadas me proponen que pronuncie la conferencia que ahora se inicia, les manifiesto mi total disponibilidad. Podrían haber elegido otro tema, tal vez de mayor oportunidad; por ejemplo y sin salirnos del ámbito de la Historia de las Matemáticas, hubiese sido un buen momento para hablar sobre las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss ya que, como saben, este año es el del bicentenario de su primera edición. En particular, en esta pieza clave en la Historia de la Teoría de Números Gauss estudia y resuelve las ecuaciones ciclotómicas en el último capítulo que termina con el Teorema de caracterización de polígonos inscriptibles en la circunferencia, un campo con interesantes derivaciones pedagógicas. También se podría haber optado por hablar sobre la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler, aprovechando que la Real Sociedad Matemática Española y la Sociedad «Thales» han coeditado su edición facsimilar con la primera traducción castellana anotada y estudio crítico (Euler, 2001), que como saben es considerada la obra que marca el punto de partida del análisis matemático.

Muchas otras cuestiones pudieran haber sido tratadas, pero la que hoy nos ocupará (uno de los grandes problemas de la matemática griega que se remonta al siglo V a. C. y que permanecerá abierto hasta 1882) no por conocida resulta menos interesante.

Los trabajos de Beckman (1971) y de Klein (1962) a finales del siglo XIX, forman un excelente referente para acercarnos al estudio de la evolución histórica del problema de la cuadratura del círculo. Incluso mucho antes, en 1754, ya Montucla (1831) había descrito una historia del estado de la cuestión hasta aquella fecha. Mucho más recientemente la editorial Springer (Berggren y otros, 2000) ha publicado un libro de fuentes sobre el tema.

Es probable que mucha gente piense que el problema de la determinación de π, salvo un interés histórico y pedagógico, no requiera actualmente la menor atención, pero ello está lejos de ser cierto. La determinación de cualquier cifra de π, sin acudir al cálculo de las anteriores, mediante un algoritmo recientemente obtenido y que nace de un desarrollo en serie, ha abierto nuevos campos de interés e investigación.

Un viaje a través de la cuadratura del círculo nos permitirá realizar un itinerario por su historia ciertamente peculiar, pues encontraremos importantes nexos entre diversos problemas y entre distintas partes de las matemáticas, desde las más elementales, hasta algunas otras más sofisticadas.

Así, partiremos de la geometría euclídea, para ir al análisis matemático, pasaremos por el complejo proceso de comprensión de los números reales, nos acercaremos a la teoría de series, a los productos infinitos y a las fracciones continuas y tendremos ocasión de avistar el cálculo diferencial e integral. El álgebra nos cogerá de camino, acercándonos a las ecuaciones algebraicas y a las extensiones de cuerpos. Asistiremos a un bello paraje de la teoría de conjuntos. Y, finalmente, de la mano del análisis volveremos a la geometría.

Haremos un itinerario intensivo. Nuestro autobús irá parando en algunos de los lugares más significativos y al final del viaje tendremos una sucinta visión de conjunto de algunos bellos rincones y recoletas plazas del casco histórico (hasta el siglo XIX) de ésta nuestra ciudad Las Matemáticas. Y a usted viajero, eso espero, le gustará recorrer nuevamente los mismos lugares más pausadamente y con la incontenible necesidad de adentrarse en calles y vericuetos callejones. Será entonces cuando empiece a disfrutar.

Definición del problema

Comencemos por definir el problema. Cuadrar una figura no es otra cosa que construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada.

La cuadratura del círculo hay que inscribirla dentro de los grandes problemas de la geometría griega, junto con la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia. En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier polígono.

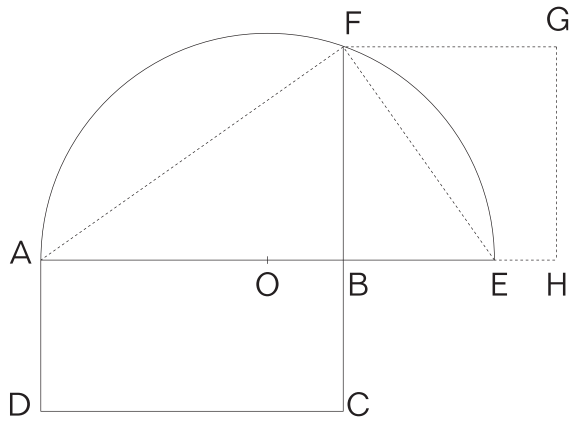


Figura 1

Por ejemplo, para cuadrar un rectángulo *ABCD* (Figura 1), se procede como sigue: 1) se prolonga el lado *AB* y se determina sobre él el punto *E* tal que los segmentos *BC* y *BE* sean iguales; 2) se determina el punto medio O del segmento *AE* y se traza la semicircunferencia de centro O y radio *AO*; 3) por *B* se traza la perpendicular a *AE*, siendo *E* el punto de corte de ésta con la semicircunferencia; 4) el segmento *FB* es el lado del cuadrado buscado.

En efecto, los triángulos ABF y FBE son semejantes, por lo que FB es media proporcional entre AB y BE, de donde $FB^2 = AB \cdot BE = AB \cdot BC$.

Análogamente, la cuadratura de un triángulo es muy simple; pasa por determinar un rectángulo del mismo área y cuadrar este último, como antes se ha indicado. Naturalmente siendo posible cuadrar el triángulo, se pueden cuadrar los diversos polígonos, sin más que dividirlos en triángulos.

Pero esta construcción de un cuadrado igual en área al de una figura dada, había que hacerla con regla y compás; es decir, dentro del marco axiomático-deductivo de la geometría griega, de la que los *Elementos* de Euclides (s. III a. C.) es el paradigma metodológico.

Las construcciones con regla y compás están determinadas por los siguientes Postulados de los *Elementos*:

> *Postulado 1*: Dados dos puntos distintos se puede trazar una recta que los une.
>
> *Postulado 3*: Dado un punto y una longitud, se puede trazar una circunferencia con el punto como centro y la longitud como radio.

Y por ello, requiere que se pueda realizar, en un número finito de pasos, haciendo uso sólo de las siguientes acciones:

1. Trazar una recta que una dos puntos.
2. Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
3. Intersecar dos de las figuras anteriores (recta con recta, recta con circunferencia o dos circunferencias).

Por tanto, como dicen Courant y Robbins (1971: 129)

> el problema no es el de dibujar figuras en la práctica con cierto grado de exactitud, sino el de demostrar que sin otra ayuda que la regla [no graduada] y el compás la solución puede hallarse teóricamente, suponiendo que nuestros instrumentos tienen precisión ideal.

Es sobradamente conocido, que todas las operaciones racionales entre segmentos son posibles; así, dados dos segmentos de longitudes a y b se pueden construir fácilmente los segmentos de longitudes $a + b$, $a - b$, ab y a/b. También se puede efectuar la extracción de raíces cuadradas (Figura 2); es decir, dado un segmento de longitud a, construir otro de longitud $\sqrt{a}$, de hecho, este último no es otro que la media proporcional entre a y 1 (Proposición IV. 13 de *Los Elementos*).

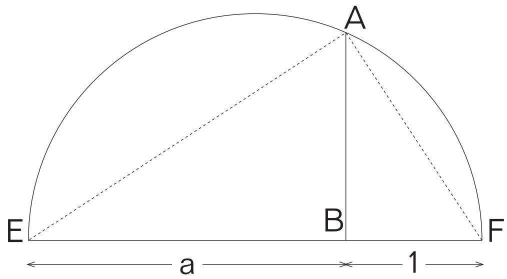


Figura 2

Observemos, desde una óptica actual, que cuadrar el círculo de radio la unidad, se reduce a construir (con regla y compás) un cuadrado cuyo lado x verifique que $x^2 = \pi$; es decir, se trata de determinar la media proporcional entre π y 1 y, toda vez que ésta es perfectamente realizable una vez construidas las otras dos magnitudes, la cuestión se limita a construir el segmento de longitud π.

La búsqueda de una solución a este problema no tuvo siempre el mismo enfoque, ni suscitó siempre la misma atención, aunque en todas las épocas anteriores a 1882 (fecha en la que queda probada la irresolubilidad del mismo) hubo «cuadratores» impenitentes y aún después de esta fecha hubo insensatos desinformados que continuaron insistiendo con peregrinas ideas. Pero, a lo largo de la historia de las matemáticas, bien por un interés directo, bien por una conexión circunstancial, este tema estuvo presente hasta su solución negativa. Siguiendo a Bold (1982) distinguiremos tres grandes etapas, que seguidamente comentamos.

Primera etapa

La primera etapa queda caracterizada por la búsqueda de π, ya sea de forma exacta o aproximada, mediante procedimientos geométricos, y abarca el periodo comprendido entre el siglo V a. C. hasta mediados del siglo XVII.

Como se ha indicado, los matemáticos griegos desde muy pronto supieron cuadrar cualquier figura poligonal, mediante simple triangulación. Era natural intentar cuadrar otras figuras planas no rectilíneas. La primera figura destacada en este empeño será Hipócrates de Quíos (s. V a. C.) quien aproximadamente sobre el 440 a. C. consiguió realizar la primera cuadratura de una figura curvilínea. Al cuadrar algunas lúnulas[1], Hipócrates conseguía cuadrar parte de un círculo. Así, por ejemplo, consiguió probar que la lúnula *AEBD* (Figura 3) es cuadrable y su área es igual a la del triángulo *AOB*.

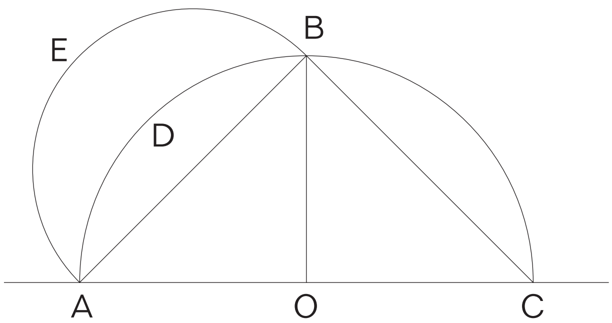


Figura 3

El descubrimiento de Hipócrates no es sino un caso particular de otros espacios circulares cuadrables, así la cuadratura de figuras curvilíneas puede generalizarse a otras compuestas total o parcialmente por lúnulas.

Estos resultados abrían, sin duda, una esperanza (vana) para conseguir cuadrar la totalidad del círculo. Hubo muchos intentos, por célebres geómetras griegos, y muchas soluciones ingeniosas, entre ellas la de Dinostrato (s. IV a. C), quien conseguía «cuadrar» el círculo mediante la cuadratriz (una curva descrita mecánicamente y que a su vez no era construible con regla y compás).

Pero la contribución más importante es la de Arquímedes (siglo III a.C.), cuya *Opera* puede verse en este hermoso ejemplar de 1615 (ROA) (Foto 1).

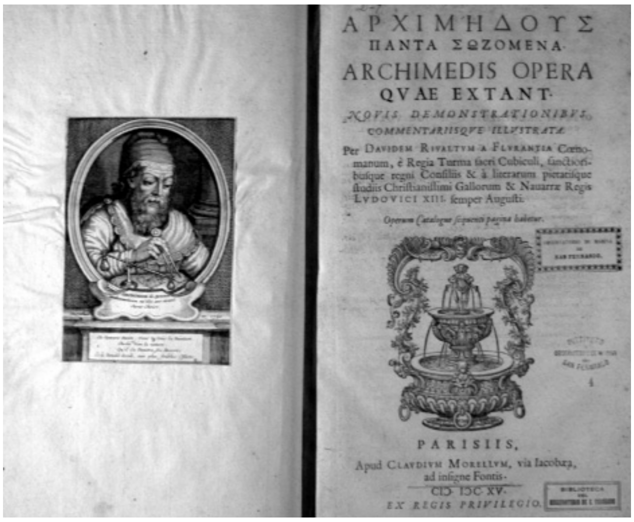


Foto 1. Portada de *Archimedis Opera*, 1615

En su escueto tratado *De la medida del círculo* (Arquímedes, 1615), que consta de sólo tres proposiciones, aparte de dar el valor del área del círculo (Teorema I), proporciona (Teorema III) un método para determinar π con el grado de aproximación que se desee, que de hecho prevaleció hasta el siglo XVII.

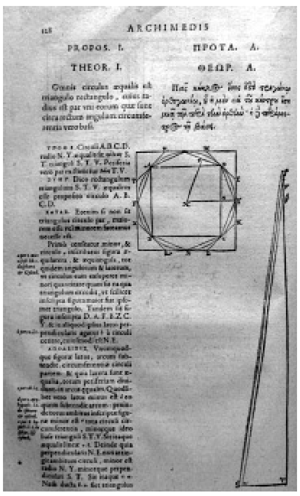


Foto 2.
Teorema I sobre
el área del círculo

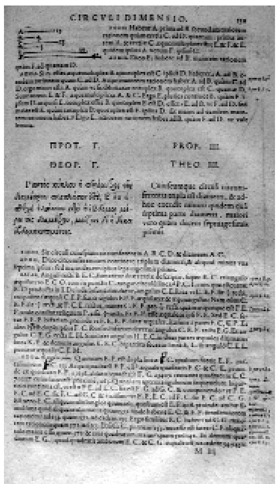


Foto 3.
Teorema III sobre
el valor de π

Arquímedes prueba que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es mayor que 3 y 10/71 y menor que 3 y 1/7. Para ello se basa en que el perímetro de un polígono regular de *n* lados inscrito en la circunferencia es menor que la longitud de ésta, mientras que el perímetro de un *n*–ágono semejante circunscrito a la circunferencia es mayor que su longitud. Tomando el número *n* de lados suficientemente grande, los dos perímetros se acercarán a la longitud de la circunferencia tanto como se desee. Partiendo del exágono y mediante sucesiva duplicación del número de lados, hasta llegar a un polígono de 96 lados, obtiene el resultado indicado, o equivalentemente que $3{,}14085 < \pi < 3{,}142857$, resultando la primera aproximación aceptable de π, con dos cifras decimales exactas.

Podemos establecer un procedimiento sistemático para la determinación de los sucesivos perímetros, partiendo siempre del inmediatamente anterior. Así, si consideramos el caso de los polígonos inscritos, podemos buscar la relación entre los lados del *n*–ágono y del 2*n*–ágono como sigue[2].

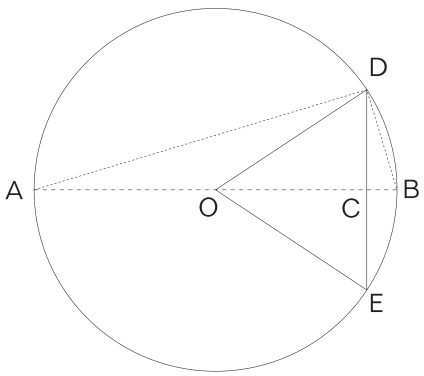


Figura 4

En el caso de los polígonos inscritos, por ejemplo, conociendo el lado del polígono de *n* lados, $DE = l_n$, en la circunferencia de radio unidad *OD*, podemos determinar el de 2*n* lados (obtenido bisecando cada lado del anterior), que en la Figura 6 es $DB = l_{2n}$. Mediante unas simples deducciones geométricas elementales obtenemos

$$l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$$

que facilita el proceso de cálculo del perímetro y, por tanto, de la cota inferior de π.

Partiendo del exágono tendremos.

$$\begin{aligned} l_6 &= 1 \\ l_{12} &= \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ l_{24} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Análogamente podemos proceder para los polígonos circunscritos.

Aunque la aproximación de Arquímedes, mediante este método poligonal, prevaleció hasta el siglo XVII (coexistiendo con algunos burdos intentos de cuadradores geométricos), no obstante, la incorporación del sistema de numeración hindú-arábigo, el uso de las fracciones decimales y de la trigonometría permitieron obtener evidentes ventajas en el cálculo.

Al final del siglo XVI, Pierre Métius[3] obtiene π con siete cifras decimales, como resultado de hacer π = 355/113, y Ludolph van Ceulen (1540-1610) obtuvo 20 cifras decimales, partiendo del polígono regular de 15 lados y llegando a duplicar el número de lados hasta 37 veces.

Foto 4. Portada de Vietae Opera

Pero, realmente el primer avance significativo no llega hasta Viète (1540-1603), en 1593. Aunque el planteamiento de Viète no es realmente nuevo, pues básicamente es análogo al de Arquímedes, pero comenzando con el cuadrado, su contribución tiene el especial valor de que obtiene π, por primera vez, como un producto infinito (Vietae, 1646: 400), en el que intervienen operaciones algebraicas.

Esencialmente, su procedimiento consiste en relacionar el área de un polígono de n lados con el de $2n$ lados obtenido por bisección de los lados del anterior. Con alguna pequeña variación en el proceso y actualizando el discurso, podemos exponer el hallazgo de Viète como sigue.

Si en la Figura 5, AB es el lado del n-ágono, y si denotamos por a_i el área de un polígono regular de i lados y por $a(AOB)$ el área del triángulo AOB, tendremos que $a_n = na(AOB)$.

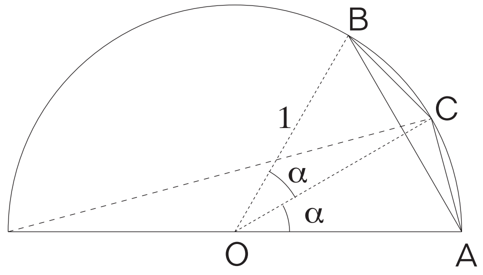


Figura 5

Un simple cálculo trigonométrico nos permite obtener

$$a_n = na(AOB) = n \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Análogamente,

$$a_{2n} = 2na(OCB) = n \operatorname{sen} \alpha$$

De aquí que

$$\frac{a_n}{a_{2n}} = \cos \alpha$$

Doblando el número de lados k veces, tendremos

$$\frac{a_n}{a_{2^k n}} = \frac{a_n}{a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n}}{a_{4n}} \cdots \frac{a_{2^{k-1} n}}{a_{2^k n}} = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^{k-1}}$$

Ya que

$$\lim_{k \to \infty} a_{2^k n} = \pi$$

se sigue que

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \, sen 2\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^{k-1}} \cdots}$$

Cada coseno del denominador anterior es expresable en términos del que inmediatamente le precede como factor, mediante la fórmula trigonométrica del ángulo mitad

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Comenzando con el cuadrado, para el que α vale 45 grados, se tiene

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

y, haciendo uso sucesivamente de las fórmula del ángulo mitad, tendremos finalmente

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

Esta expresión es más importante desde el punto de vista teórico que práctico, pues su convergencia es muy lenta.

En la primera mitad del siglo XVII se produce la primera modificación considerable, del procedimiento poligonal de Arquímedes para la aproximación del valor de π, de la mano de W. Snellius (1580-1626). En las proposiciones 27 y 29 de su obra *Ciclometrycus*, de 1621, proporciona una mejora de las acotaciones del arco de circunferencia dadas por los polígonos inscritos y circunscritos. La justificación que da Snellius no es suficiente, pero C. Huygens (1629-1695) da una demostración de ellas en *De circuli magnitude inventa* de 1654 (Huygens, 1724: 376), junto con catorce teoremas más sobre el tema con todo el rigor euclídeo. Las referidas proposiciones proporcionan una cota inferior y otra superior:

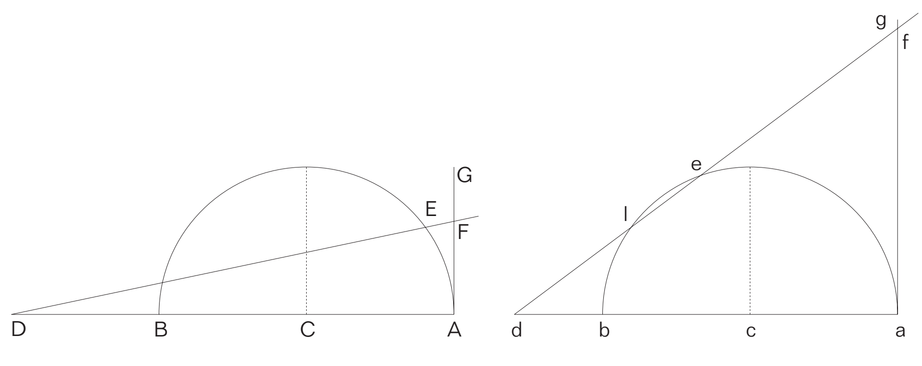


Figura 6

Cota inferior: Si se prolonga el diámetro *AB* de un círculo, en *D*, de manera que *BD* sea igual al radio, toda línea trazada con origen en este punto y que corte a la circunferencia del círculo, determina de la tangente *AG* un segmento *AF* menor que el arco contiguo *AE* (Figura 6); es decir, $AF < AE$.

Cota superior: Pero si *df* es trazada de manera que el segmento *dl* sea igual al radio, en este caso, el segmento *af* de la tangente será más grande que el arco *ae* (Figura 6); es decir, $af > ae$.

La mejora sobre las cotas de π que estas propiedades proporcionan quedan en evidencia con sólo considerar el exágono; con él, el procedimiento de Arquímedes proporciona la acotación $3 < \pi < 3{,}464$, mientras que con el de Snellius se tendría $3{,}14022 < \pi < 3{,}1416$, que resulta tan bueno como el obtenido por Arquímedes utilizando un polígono con 96 lados.

No podemos terminar este breve repaso por las diversas contribuciones habidas sobre el tema, anteriores a 1650, sin referirnos a Gregorii de Saint Vicent (1584-1667), quien en la búsqueda de un gran número de difíciles cuadraturas descubrió la conocida propiedad (Cf. Boyer, 1986) que nos informa que según crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva de la hipérbola $xy = 1$ lo hace aritméticamente.

Saint Vincent buscó la cuadratura del círculo investigando propiedades de la espiral de Arquímedes y de la cuadratriz; luego, mediante la comparación entre diversos cuerpos y sus razones, cree obtener la cuadratura del círculo, resultado que publica en 1647. Este singular error provocó una gran polémica, de la que cabe destacar las críticas formuladas por Descartes (1596-1650), en carta a Schooten (Descartes, 1667, Tomo III, lettre 117), y la de Huygens, en *Exetasis Cyclometriae Gregorii a Sancto Vicentio* (Cf. Huygens, 1724: 328).

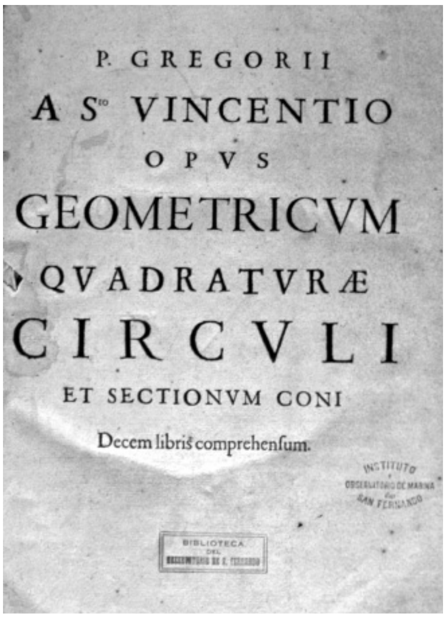


Foto 5. Portada de
Opus Geometricum de St. Vincent

Foto 6. Segunda página de
Opus Geometricum de St. Vincent

Segunda etapa

El segundo periodo se inicia en la segunda mitad del siglo XVII. Con la ayuda del nuevo cálculo infinitesimal, los métodos geométricos aparecen obsoletos y las nuevas herramientas como los desarrollos en serie, los productos infinitos y las fracciones continuas permitirán nuevas expresiones para la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro.

La primera figura destacada de esta etapa es Wallis (1616-1703), quien, como Viète, consigue expresar π como un producto infinito, pero esta vez apareciendo sólo operaciones racionales. La ausencia de radicales significaba una mejora en el cálculo, respecto del procedimiento de Arquímedes o de Viète. Mediante un compleja deducción, usando una serie de interpolaciones y de procesos inductivos, obtiene que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$$

en su obra *Arithmetica Infinitorum* de 1655 (Cf. Wallis, 1699, Tomo I: 467).

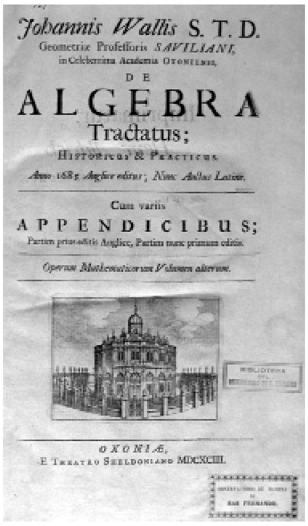

Johannis Wallis S. T. D.
DE
ALGEBRA
Tractatus;
Cum variis
APPENDICIBUS;
OXONIÆ,
MDCXCIII.

Foto 7. Portada de la obra de Wallis

Se le deben otras contribuciones relacionadas con π, entre ellas las aproximaciones que obtiene en el capítulo segundo de *De algebra tractatus* (Wallis, 1693 y 1699, Tomo II: 49). Por otra parte, Wallis (1699, Tomo II: 353) opinaba que la cuadratura del círculo era imposible, en tanto que creía que

> la razón del círculo a una figura rectilínea no puede ser expresada por ninguna expresión aún reconocida, incluso por números irracionales; de forma que posiblemente sea necesario introducir alguna nueva manera de expresión distinta de los números racionales e irracionales.

Como Wallis, James Gregory (1638-1675) creía que la cuadratura del círculo era imposible, pero fue más lejos y, en 1668, publica *Vera Circuli et Hiperbolae Quadratura*, donde pretendió demostrar que la cuadratura era imposible. Sus argumentaciones son recogidas por Huygens (1724: 405 y ss.), junto con la refutación de las mismas.

Más interesante es el descubrimiento por James Gregory del desarrollo en serie de la arc tan *x*. Primero observa que el área bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$, en el intervalo $(0, x)$ era la arcotangente de *x*; es decir,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

Luego, mediante «división larga» desarrolla en serie el integrando y haciendo uso de la integral de Cavalieri (Cf. Edwards, 1982),

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad \text{para } n \geq 0$$

integra término a término obteniendo

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para $x = 1$, arctan 1 = $\pi/4$, resultando

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

desarrollo en serie de π que era encontrado por Leibniz (1646-1716) en 1682.

Pero la convergencia de esta serie es extremadamente lenta, por lo que a los fines prácticos resulta inadecuada. Será Newton (1643-1727) quien encuentre un desarrollo en serie para π cuya rapidez de convergencia empiece a ser aceptable. En *The Methodis Fluxionum et Serierum Infinitarum*, escrito en 1671 y publicado en 1736 (Newton, 1744) considera, en lenguaje actual, la semicircunferencia de centro C(1/2, 0) y radio 1/2 (Figura 7), *B*(1/4, 0) y el ángulo *BCD* = $\pi/3$, por lo que será

$$y = \sqrt{x - x^2}$$

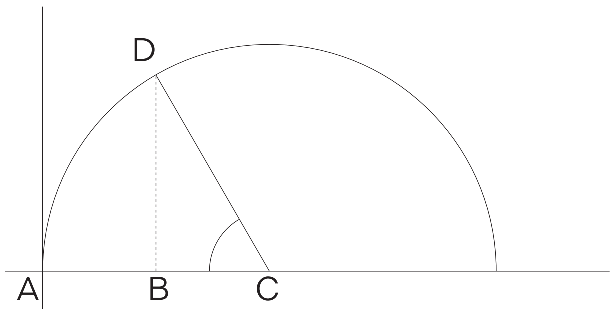


Figura 7

Como las áreas de *ABD*, el sector circular *ADC* y el triángulo *DBC* verifican la relación $a(ABD) = a(ADC) - a(DBC)$, y

$$a(ADC) = 1/3(1/2\pi R^2) = \pi/24;$$

resulta

$$a(ABD) = \pi/24 - \sqrt{3}/32 \qquad [1]$$

pues $BD = \sqrt{3}/4$.

Por otra parte

$$a(ADB) = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\, dx$$

Desarrollando el integrando por la serie del binomio e integrando término a término, se obtiene

$$a(ADB) = \left[\frac{2}{3x^{3/2}} - \frac{1}{5x^{5/2}} - \frac{1}{28x^{7/2}} - \frac{1}{72x^{9/2}} - \cdots \right]_0^{1/4} =$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \cdots \qquad [2]$$

De [1] y [2] se sigue que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{5}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \cdots \right)$$

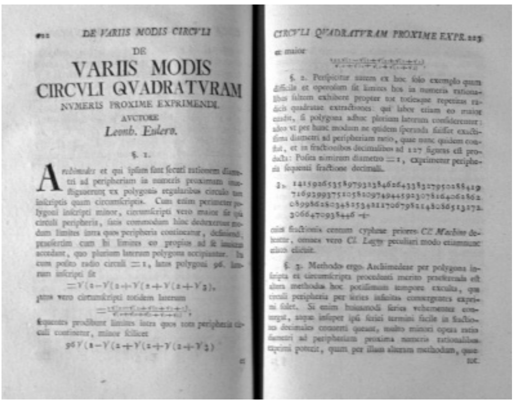
Con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales.

A principios del siglo XVIII, se introducirán algunas mejoras en la aproximaci ón de π, de la mano de A. Sharp (1651-1742), en 1705, y de John Machin (1680-1752), en 1706.

Ambos parten de la serie de Gregory-Leibniz; es decir, del desarrollo en serie de arctan x. El primero sustituye x por $1/\sqrt{3}$ y obtiene

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \right)$$

calculando π con 72 cifras decimales. El segundo, haciendo uso de un artificio para acelerar la convergencia de la serie, calcula π con 100 cifras decimales, siendo citado por Euler.


DE VARIIS MODIS CIRCVLI

DE VARIIS MODIS CIRCVLI QVADRATVRAM NVMERIS PROXIME EXPRIMENDI.

AVCTORE *Leonh. Eulero.*

CIRCVLI QVADRATVRAM PROXIME EXPR.

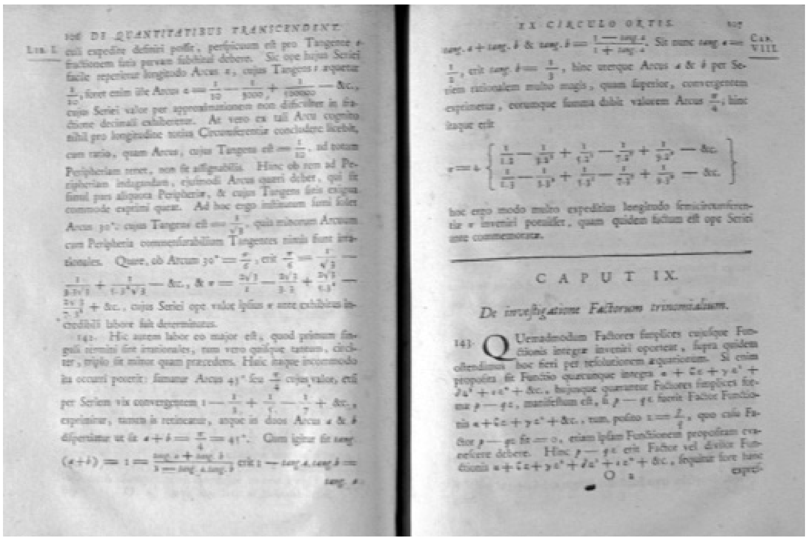
Foto 9.
De variis modis circuli quadraturam… de Euler

Machin proporciona el grado de perfección que faltaba para que el método de aproximar π mediante un desarrollo en serie fuese eficiente, evitando los dos problemas básicos que hasta ese momento tal procedimiento tenía: de una parte, la convergencia lenta, y de otra, la complicación en las operaciones cuando aparecen radicales.

Básicamente la idea es expresar $\pi/4$ = arctan 1 en función de dos ángulos de tangentes racionales y cada una de ellas menor que la unidad, lo que proporcionará para cada ángulo una serie racional y rápidamente convergente. De este modo obtiene

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right) \quad [3]$$

La idea de acelerar la convergencia, partiendo de la serie de la arcotangente, fue también utilizada por Euler[4] (1748), por un procedimiento similar


DE QUANTITATIBUS TRANSCENDENT.

EX CIRCULO ORTIS.

CAPUT IX.

De investigatione Factorum trinomialium.

Foto 10. Aceleración de la convergencia en *Introductio* de Euler

y también en Euler (1744), mediante un procedimiento distinto. Este tipo de procedimientos y fórmulas han sido utilizados desde entonces para obtener π con un número de cifras decimales cada vez mayor. Incluso en la segunda mitad del siglo XX, con el uso de ordenadores, permitieron progresivamente mejorar el tiempo de cómputo y el número de cifras decimales; de hecho, se ha usado la búsqueda de cifras de π, y el tiempo empleado para ello por un ordenador, como un medio para probar la eficacia de ciertos programas y ordenadores.

Pero los dos resultados más importantes del siglo XVIII, en el camino de la resolución del problema, podemos encontrarlos en las obras de Euler y de Lambert (1728-1777).

Euler, aparte de mejorar la aproximación de π mediante métodos para acelerar la convergencia de la serie, lo obtiene mediante diversas expresiones y formas:

1. Como suma de múltiples series en las que sólo usa operaciones racionales; por ejemplo, en el capítulo VIII, «De las cantidades trascendentes que nacen del círculo», de su obra de 1748 *Introductio in Analysin Infinitorum*. Él mismo dice (*op. cit.*, artículo 141): «Podemos encontrar diversas expresiones para π obteniendo una expresión que converja más rápidamente que la de Leibniz, donde las operaciones son siempre racionales».
2. Como resultado de productos infinitos; por ejemplo, en el capítulo XV, «De las series resultantes del Desarrollo en Factores», de la obra citada (Euler, 1748).
3. Como fracción continua; por ejemplo, en el capítulo XVIII, «De las fracciones continuas», de la referida obra.

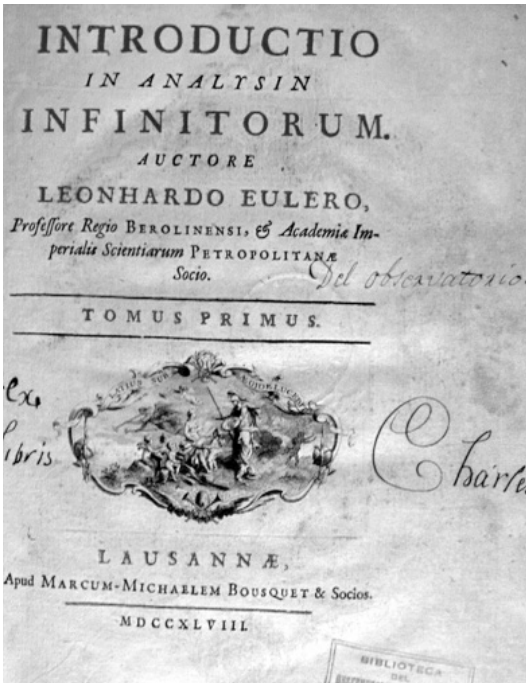

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Foto 11. Portada de *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler

Pero uno de los hallazgos más importantes en el tema que nos ocupa, es la fórmula que relaciona las funciones exponenciales y trigonométricas, $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$, y que podemos encontrar[5] en el artículo 138 de *Introductio* (Euler, 1748, Capítulo VIII: 104)[6].

El procedimiento de Euler es básicamente como sigue. Del desarrollo del binomio, para n infinitamente grande obtiene

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

De la fórmula de De Moivre, $(\cos z \pm i \operatorname{sen} z)^n = \cos nz \pm i \operatorname{sen} nz$ se sigue que

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i\,sen\,z)^n + (\cos z - i\,sen\,z)^n}{2}$$

y

$$sen\,nz = \frac{(\cos z + i\,sen\,z)^n - (\cos z - i\,sen\,z)^n}{2i}$$

Si z es infinitamente pequeño y n infinitamente grande, siendo $v = nz$ un valor finito, resulta $\operatorname{sen} z = v/n$ y $\cos z = 1$. Sustituyendo en las expresiones anteriores de sen nz y de $\cos nz$ resulta

$$\cos v = \frac{\left(1+\dfrac{vi}{n}\right)^n + \left(1-\dfrac{vi}{n}\right)^n}{2}$$

y

$$sen\,v = \frac{\left(1+\dfrac{vi}{n}\right)^n - \left(1-\dfrac{vi}{n}\right)^n}{2i}$$

Para $z = iv$ queda $\cos v = (e^{vi}+e^{-vi})/2$ y $\operatorname{sen} v = (e^{vi}-e^{-vi})/2i$ y así $e^{\pm iv} = \cos v \pm i \operatorname{sen} v$. Para $v = \pi$ tenemos $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Los trabajos sobre fracciones continuas, sistematizados por Euler en el capítulo XVIII de *Introductio*, serán también de gran utilidad para que Lambert dé el siguiente paso importante. En *Histoire de L'Académie Royale* de Berlin, correspondiente al año 1761 (editado en 1768), Lambert publica una memoria titulada *Memoire sur quelques propietés remarquables des quantités trascendentes circulaires et logarithmiques*, en la que apoyándose en los desarrollos en fracciones continuas, prueba que si $x \in Q$, $x \neq 0$, entonces e^x y $\tan x$ no son racionales. Puesto que $\tan \pi/4 = 1 \in Q$, entonces $\pi/4 \notin Q$ y π es irracional.

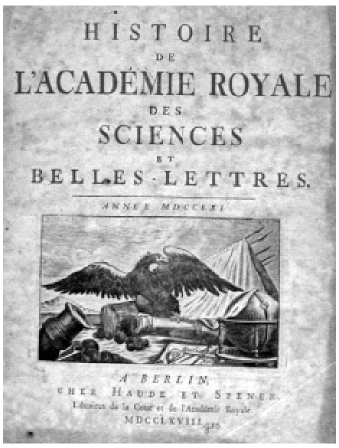


Foto 12. Portada de *Histoire de l'Académie* de 1768

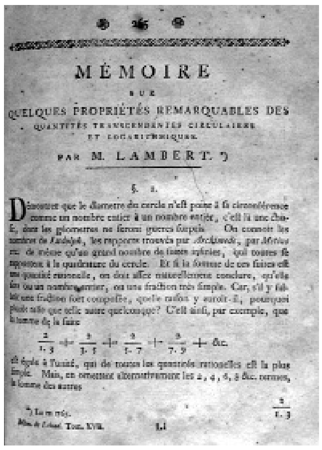

MÉMOIRE
SUR
QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES QUANTITÉS TRANSCENDENTES CIRCULAIRES ET LOGARITHMIQUES.
PAR M. LAMBERT.
§. 1.

Foto 13. Primera página de la Memoria de Lambert

Debemos observar que la irracionalidad de π no cerraba el problema de la cuadratura del círculo (hay muchos irracionales que pueden construirse con regla y compás, sin ir más lejos $\sqrt{2}$). Incluso cuando, en 1794, Legendre (1752-1833) demuestra que π^2 es irracional, no eliminaba la posibilidad de que π pudiera ser la raíz de algún índice superior a dos para algún número racional.

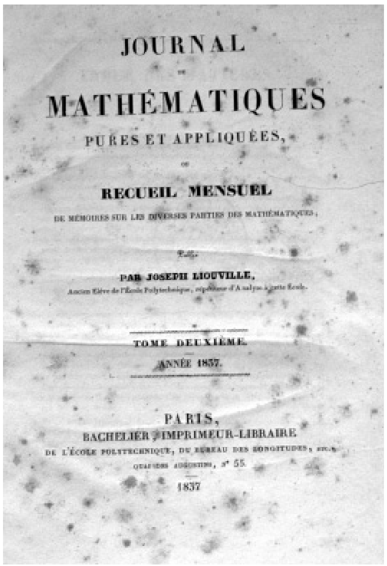
La sospecha, ya formulada por Euler, de que π era trascendente o, equivalentemente, no era algebraico (es decir, no era raíz de una ecuación algebraica con coeficientes racionales $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$), sería definitivamente probada, como luego comentaremos, por Lindemann (1852-1939) en 1882.

Hemos de observar que en el siglo XVIII, realmente hasta la mitad del siglo XIX, el comportamiento de los números reales no estaba claro. La irracionalidad no significaba la trascendencia, de hecho, aparte de los racionales ($qx = p$) cualquier irracional cuadrático es también algebraico, por ejemplo $\sqrt{2}$ es raíz de $x^2-2 = 0$. Es más, aún no se conocía ningún número trascendente. Lambert había probado que π era irracional, pero ¿sería algebraico?

Tercera etapa

La tercera época que distinguimos se corresponde con el siglo XIX, cuando desde los orígenes de la teoría de extensión de cuerpos y con el uso de toda la potencia del análisis se encuentra la respuesta definitiva.

El primer hecho singular de este periodo lo marca P. L. Wantzel (1814-1848), quien, en 1837, traduce los problemas geométricos de regla y compás al terreno algebraico en su trabajo *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*[7] (Wantzel, 1837).



JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, OU RECUEIL MENSUEL DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

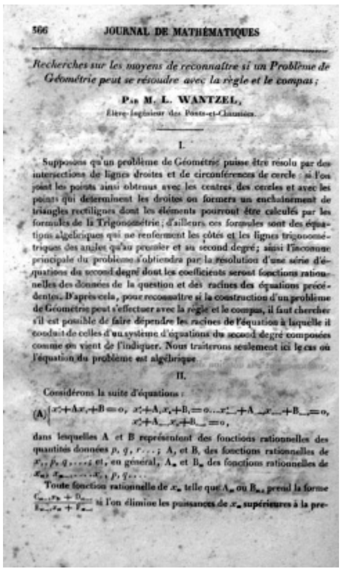
PAR JOSEPH LIOUVILLE,

TOME DEUXIÈME. ANNÉE 1837.

PARIS, BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC. QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1837

Foto 14. Portada del *Journal* de Liouville de 1837



366 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas;

PAR M. L. WANTZEL,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

I.

Supposons qu'un problème de Géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences de cercle : si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres des cercles et avec les points qui déterminent les droites on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les éléments pourront être calculés par les formules de la Trigonométrie; d'ailleurs ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici le cas où l'équation du problème est algébrique.

II.

Considérons la suite d'équations :

$$(A)\left\{\begin{array}{l} x_1^2+Ax_1+B=0,\quad x_2^2+A_1x_2+B_1=0 \ldots x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0, \\ x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0, \end{array}\right.$$

dans lesquelles A et B représentent des fonctions rationnelles des quantités données $p, q, r \ldots$; A_1 et B_1 des fonctions rationnelles de $x_1, p, q \ldots$; et, en général, A_m et B_m des fonctions rationnelles de $x_m, x_{m-1} \ldots x_1, p, q \ldots$

Toute fonction rationnelle de x_m telle que A_m ou B_{m} [illegible] prend la forme $\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$ si l'on élimine les puissances de x_m supérieures à la pre-

Foto 15. Primera página del artículo de Wantzel

La idea básica de Wantzel consiste en identificar los segmentos por sus longitudes y determinar qué magnitudes pueden construirse con regla y compás (que denominaremos números construibles). Desde luego, dado que las operaciones racionales con segmentos son realizables con regla y compás, es claro que los números racionales son construibles. Si π fuera un número construible, entonces la media proporcional entre π y 1, que es construible con regla y compás, proporcionaría la cuadratura del círculo de radio unidad.

Observemos en primer lugar que mediante extensiones de los racionales por radicales cuadráticos, se obtienen números construibles.

En efecto, si $k \in Q = F_0$ es un número racional dado, podemos construir $\sqrt{k}$ y $a + b\sqrt{k}$, con $a, b \in F_0$, por lo que todos los números del conjunto

$$F_1 = \{a + b\sqrt{k} : a, b \in F_0\}$$

son construibles y es fácil comprobar que forman un cuerpo, que contiene al de los racionales (basta considerar $b = 0$) y si $\sqrt{k} \notin F_0$ (caso, por ejemplo, de $k = 2$) lo contendrá estrictamente.

Si ahora $k_1 \in F_1$ es un número dado del conjunto anterior, tal que $\sqrt{k_1} \notin$ F1 y $a_1, b_1 \in F_1$, entonces

$$F_2 = \{a_1 + b_1\sqrt{k_1} : a_1, b_1, k_1 \in F_1\}$$

es un cuerpo de números construibles y $F_2 \supseteq F_1 \supseteq F_0$.

Este proceso puede continuarse, obteniéndose, al cabo de n pasos, un cuerpo F_n de números, todos construibles con regla y compás, y tal que $F_n \supseteq \ldots \supseteq F_2 \supseteq F_1 \supseteq F_0 = Q$.

El recíproco también es cierto; es decir, cualquiera que sea el número construible considerado, éste pertenece a alguno de los cuerpos

$$F_n \supseteq \ldots \supseteq F_2 \supseteq F_1 \supseteq F_0$$

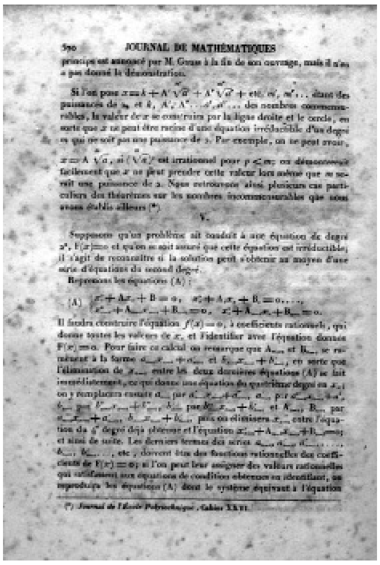
para algún $n \in N$.

En efecto, con regla y compás sólo se pueden trazar rectas y circunferencias, cuyas ecuaciones son, a lo más, de segundo grado. De este modo, los sucesivos puntos, obtenidos por sucesivas construcciones, son siempre intersección de curvas algebraicas de, a lo sumo, grado dos.

Supongamos que en un primer paso, partimos de puntos con coordenadas racionales, como $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, $x_i, y_i \in Q$. La ecuación de la recta $(y_2-y_1)x + (x_1-x_2)y + (x_2y_1-x_1y_2) = 0$ que los une tiene coeficientes racionales. Y una circunferencia con centro en uno de esos puntos (por ejemplo P) y radio r tiene una ecuación $x^2+y^2-2x_1x-2y_1y+x_1^2+y_1^2-r^2 = 0$ con coeficientes racionales.

El segundo paso de la construcción consistirá en determinar un tercer punto, como intersección de dos rectas o de una recta y una circunferencia o de dos circunferencias del paso anterior. Ahora bien, la intersección de dos rectas sólo requiere operaciones racionales sobre los coeficientes de ambas rectas; y la intersección de recta y circunferencia o de dos circunferencias requiere operaciones racionales y extracción de raíces cuadradas[8]. De este modo, las coordenadas del nuevo punto pertenecerán a algún cuerpo del tipo F_i.

En sucesivos pasos, el razonamiento se repite y, consecuentemente, las coordenadas de cada punto que se va obteniendo en el proceso de la construcción, pertenecerán a algún cuerpo F_i.


370 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

principe est annoncé par M. Gauss à la fin de son ouvrage, mais il n'en a pas donné la démonstration.

Foto 16. Una página (370)
del artículo de Wantzel

Pero además, en un paso dado, las coordenadas del punto a determinar son solución de una ecuación cuadrática, cuyos coeficientes o son racionales o irracionales en los que sólo aparecen radicales cuadráticos. Para convertir esta ecuación en una con coeficientes racionales, basta elevarla al cuadrado tantas veces como radicales cuadráticos haya. Por tanto, si la construcción completa se hace en n pasos, la ecuación final a resolver será, a lo sumo, una ecuación de grado 2^n, con coeficientes racionales y de aquí que estemos hablando de números algebraicos. Luego si π es construible, entonces π ha de ser algebraico.

Mientras tanto, aún se desconocía la existencia de números trascendentes. Pero en 1844 J. Liouville (1809-1882) demuestra la existencia de tales números, lo que podemos examinar en su artículo *Sur des classes très–étendues de quantités dont le valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, publicado en 1851[9].

En el citado trabajo, Liouville prueba que si

$$x = \frac{k_1}{10^{1!}} + \frac{k_2}{10^{2!}} + \frac{k_3}{10^{3!}} + \cdots + \frac{k_m}{10^{m!}} + \cdots =$$

$$= 0{,}k_1k_2000k_300000000000000000k_40\cdots$$

con $0 \leq k_i \leq 9$, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces x es trascendente. De este modo, aparecía no sólo un número trascendente, sino toda una infinidad de ellos. La conjetura de que π podía ser trascendente era ahora mucho más plausible.

PURES ET APPLIQUÉES. 133

Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques;

PAR J. LIOUVILLE.

1. J'ai présenté, il y a longtemps, sur ce sujet, à l'Académie des Sciences, et fait insérer dans le tome XVIII des *Comptes rendus* (pages 883 et 910; séances des 13 et 20 mai 1844) deux Notes que je crois devoir reproduire ici en les complétant. La première est ainsi conçue:

« Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h = 0,$$

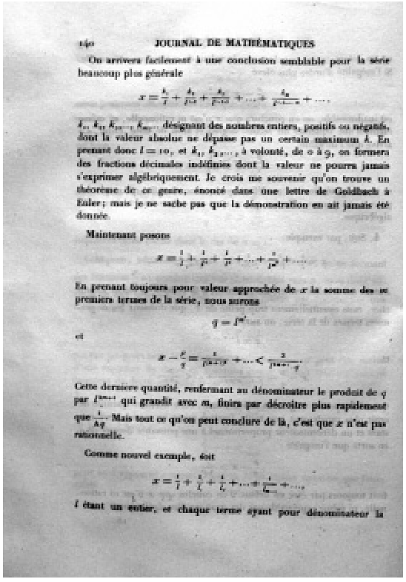
$a, b, \dots, g, h$ étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p}{q}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable x de cette équation, le quotient incomplet μ, qui vient après la réduite $\frac{p}{q}$, et sert à former la réduite suivante, finira (cela résulte d'une formule de Lagrange, voyez les Mémoires de Berlin, année 1768) par être, pour des valeurs de q très-grandes, constamment inférieur à

$$\pm \frac{df(p,q)}{qf(p,q)\,dp},$$

expression essentiellement positive où l'on suppose

$$f(p,q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \dots + hq^n.$$

Foto 17. Primera página del artículo de Liouville



140 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

On arrivera facilement à une conclusion semblable pour la série beaucoup plus générale

$$x = \frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l^{1.2}} + \frac{k_3}{l^{1.2.3}} + \dots + \frac{k_m}{l^{1.2.3\dots m}} + \dots,$$

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_m, \dots$ désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs, dont la valeur absolue ne dépasse pas un certain maximum k. En prenant donc $l = 10$, et $k_1, k_2, \dots$, à volonté, de 0 à 9, on formera des fractions décimales indéfinies dont la valeur ne pourra jamais s'exprimer algébriquement. Je crois me souvenir qu'on trouve un théorème de ce genre, énoncé dans une lettre de Goldbach à Euler; mais je ne sache pas que la démonstration en ait jamais été donnée.

Maintenant posons

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^{2}} + \frac{1}{l^{6}} + \dots + \frac{1}{l^{1.2.3\dots m}} + \dots$$

En prenant toujours pour valeur approchée de x la somme des m premiers termes de la série, nous aurons

$$q = l^{m!}$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l^{(m+1)!}} + \dots < \frac{2}{l^{(m+1)!}\cdot q}.$$

Cette dernière quantité, renfermant au dénominateur le produit de q par $l^{(m+1)\dots}$ qui grandit avec m, finira par décroître plus rapidement que $\frac{1}{kq}$. Mais tout ce qu'on peut conclure de là, c'est que x n'est pas rationnelle.

Comme nouvel exemple, soit

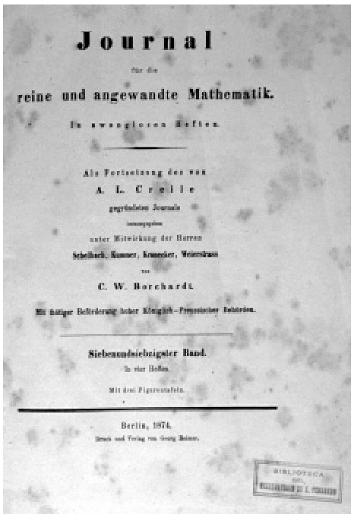
$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_m} + \dots,$$

l étant un entier, et chaque terme ayant pour dénominateur la

Foto 18. Página 140 del artículo de Liouville

En 1873 Hermite (1822-1901) prueba que *e* es trascendente, por lo que una ecuación finita de la forma $a_0 + a_1e^{p1} + a_2e^{p2} + \dots = 0$ no puede satisfacerse, si los $p_i \in$ N y los $a_i \in$ Q no son todos nulos.

Un año después, Cantor (1845-1918) demuestra que el conjunto de los números algebraicos es numerable en su artículo *Uber eine Eigenscheft des Inbegrffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Cantor, 1874)[10].



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Siebenundsiebzigster Band.

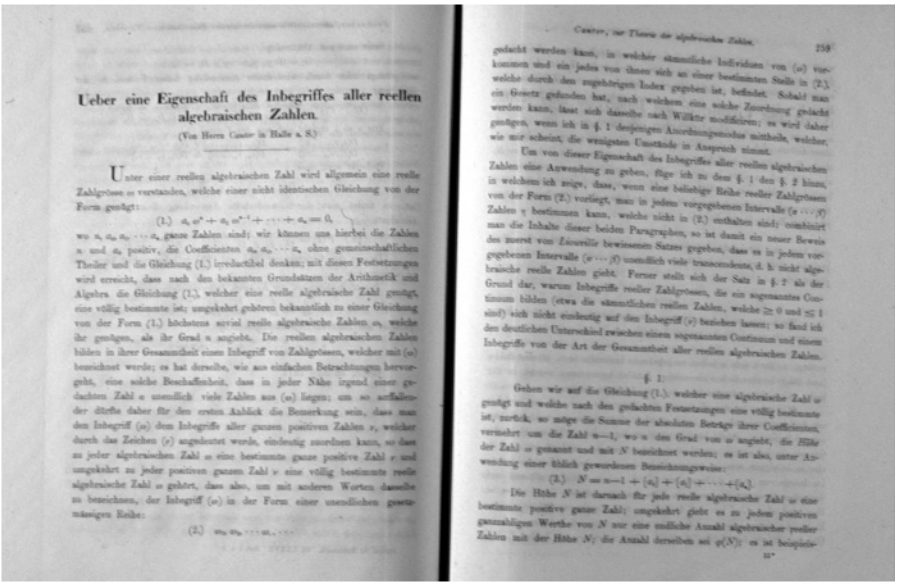
In vier Heften.

Mit drei Figurentafeln.

Berlin, 1874.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Foto 19, Portada del *Journal* de Crelle de 1874


Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

(Von Herrn Cantor in Halle a. S.)

Foto 20. Páginas 258 y 259 del artículo de Cantor

De este modo se tiene que el conjunto de los números trascendentes no es numerable. De no conocerse ningún número trascendente, en unos pocos años se sabe que «casi todos los números reales son trascendentes». Sin duda, la trascendencia de π no se haría esperar.

Finalmente, en 1882, Lindemann prueba, siguiendo a Hermite, que: si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son números algebraicos distintos (reales o complejos) y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números algebraicos (reales o complejos) no todos nulos, entonces la suma finita $a_0 + a_1e^{p1} + a_2e^{p2} + \ldots + a_ne^{pn}$ no puede ser igual a cero.

Como consecuencia, recordando la expresión $e^{i\pi} + 1 = 0$ que anteriormente comentamos a propósito de Euler, que es de la forma del Teorema de Lindemann, se tendrá que $i\pi$ no puede ser algebraico. Pero como el producto de dos números algebraicos es algebraico y tanto 1 como i ($x^2 + 1 = 0$) son algebraicos, resulta que π ha de ser trascendente.

Recordando lo dicho al mencionar a Wantzel, como todos los números construibles son algebraicos, se sigue que π no es construible y que la cuadratura del círculo es imposible.

Epílogo

Hemos realizado un recorrido por los hallazgos fundamentales del problema de la cuadratura del círculo, acudiendo a las fuentes originales, en este caso, casi todas en la excelente biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando (ROA)[11]. Es sólo un botón de muestra de las posibilidades de acercarse rigurosamente a la historia de las matemáticas. Posibilidades que en nuestras circunstancias geográficas, por la proximidad con el ROA, son privilegiadas.

Al interesarnos por la historia de las matemáticas, estaremos penetrando en la profundidad de los problemas de nuestra ciencia, y ello tiene una proyección de futuro, tanto para el investigador como para el docente.

Finalmente, les hago una propuesta para este nuevo siglo recien estrenado: les animo a que viajando por el pasado cimienten mejor el futuro, el de las matemáticas y el de su enseñanza.

Referencias

ARQUÍMEDES (1615): *Archimedis Opera quae extant novis demostrationibus*, Paris.

BECKMAN, P. (1971): *A history of* π, St. Martin's, New York.

BERGGREN, L., J. BORWEIN y P. BORWEIN (2000): *Pi: A Source Book*, Springer.

BOLD, B. (1982): *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publications, New York.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

CAJORI, F. (1929): *A History of Mathematical Notations*, 2 vols., The Open Court Publishing Company, Chicago.

CANTOR, G. (1874): «Uber eine Eigenscheft des Inbegrffes aller reellen algebraischen Zahlen», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 258-262.

COURANT, R. y H. ROBBINS (1971): *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid.

DESCARTES, R. (1667): *Lettres de Mr. Descartes, où sont traitées plusiers belles questions touchant le Morale, Physique, Medicine, et les Mathématiques*, 3 vols., Paris.

EDWARS, C.H. (1982): *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York.

EUCLIDES (1991): *Los Elementos*, libros I al XIII, en tres volúmenes, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid.

EULERO, L. (1744): «De variis modis circuli quadraturam numeris proxima exprimendi», *Comentarii Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae*, IX, 1737, publicado en 1744, 222-238.

EULERO, L. (1748): *Introductio in Analysin Infinitorum*, 2 vols., Lausannae.

EULER, L. (2001): *Introductio in Analysin Infinitorum*, edición facsimilar con traducción anotada y estudio crítico. Editores: A. J. Durán Guardeño y F. J. Pérez Fernández. Editan: Real Sociedad Matemática Española y Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», Sevilla.

EULERO, L. (1736): *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, 2 vols., Petropoli.

EULERO, L. (1744): «Variae Observationes Circa Series Infinitas», *Comentarii Academiae Scientarum Imperialis Petropolitanae*, IX, 1737, publicado en 1744, 160-188.

HUYGENS, C. (1724): *Opera varia*, 2 vols., Lugduni Batavorum.

KLEIN, F. (1962): *Famous problems of elementary geometry*, Chelsea Publishing Company, New York.

LAMBERT, M. (1768): «Memoire sur quelques propietés remarquables des quantités trascendentes circulaires et logarithmiques», *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 1761, publicado en 1768, 265322.

LEIBNIZ, G.W. (1682): «De vera proportione circuli ad quadratum circunscriptum in numeris rationalibus», *Acta Eruditorum*, I, p. 41.

LINDEMANN, F. (1882): «Uber die Zahl π», *Mathematische Annalen*, 20, 212-225.

LIOUVILLE, J. (1851): «Sur des classes très-étendues de quantités dont le valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 16, 133-142.

MONTUCLA, J.E. (1831): *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle*, Paris. (Se trata de una reedición comentada de la primera edición de 1754).

NEWTON, I. (1744): *Opuscula Mathematica*, 3 vols., Lausannae et Genevae.

SANCTO VICENTIO, G. (1647): *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, 2 vols., Antuerpiae.

VIETAE, F. (1646): *Francisci Vietae Opera Mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita. Opera atque studio Francisci a Schooten*, Lugduni Batavorum.

WALLIS, J. (1693): *De Algebra Tractatus; historicus & practicus*, Oxoniae.

WALLIS, J. (1699): *Opera*, 2 vols., Oxoniae.

WANTZEL, P. L. (1837): «Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, 366-372.

Notas

* Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz. Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».

1 Una lúnula es una figura plana delimitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos.

2 Esta relación aparece en las Proposiciones 1 y 2 de la obra *Cyclometricus* (1621) de Snellius, a la que más tarde nos referiremos.

3 Citado por Montucla (1831: 58).

4 El uso de la letra π, como notación para la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, aparece por primera vez, según Cajori (1929, Volumen II: 9), en 1706, en la página 263 del tratado *Sypnosis palmariorum matheseos* de William Jones. Euler la usa por primera vez en (Euler, 1736, Vol. I, págs. 119 y 123; Vol. II, págs. 70 y 80), pero este símbolo se impone para denotar 3,1415… a partir de su trabajo *Variae Observationes*… de 1737, pág. 165.

5 Un resultado análogo había sido encontrado antes por Cotes (1682-1716), en un trabajo suyo publicado en *Philosophical Transactions* de 1714.

6 En el original, aún se denota la unidad imaginaria i por $\sqrt{-1}$.

7 Con este trabajo, publicado en el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (conocido usualmente como Journal de Liouville, por ser este último quien lo fundó en 1836) Wantzel probó la imposibilidad de la trisección del ángulo, al demostrar que si una cúbica de coeficientes racionales, $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, no tiene alguna solución racional, entonces ninguna de sus raíces es construible. Trisecar un ángulo se reduce a resolver una cúbica; ya que para $\pi/3$ radianes la cúbica resultante, $8z^3 - 6z - 1 = 0$, no tiene raíces racionales, se deduce que el ángulo de 60 grados no es trisecable.

8 Por ejemplo: para dos circunferencias $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ y $(x-c)^2+(y-d)^2 = s^2$, se tendrá

$$(a \pm [r^2 - (y - b)^2]^{1/2} - c)^2 + (y - d)^2 = s^2.$$

9 Liouville dió por primera vez cuenta de su descubrimiento en *Comptes Rendus*, 18, 1844, 910-911.

10 Publicado en *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, revista conocida como Journal de Crelle, por ser este último quien la fundara en 1826.

11 Mi reconocimiento al ROA, por las facilidades que me ha dado para consultar las numerosas fuentes originales citadas en este trabajo. Agradezco a su Director, Subdirector y Bibliotecario la exquisita cortesía y las muchas amabilidades dispensadas, por las que he podido sentirme durante tantas horas como en casa.

La «cacharrería»
produce un pequeño
retraso
en el inicio
de la conferencia

Florencio Villarroya,
Presidente de la
Sociedad Aragonesa,
prsenta a Javier Pérez

Javier Pérez
pronunciando su
conferencia sobre
la cuadratura del círculo